Séries numériques

Tester ses connaissances

1. Qu'est-ce qu'une série numérique ?
2. Que signifie « étudier une suite, une série » ?
3. Comment note-t-on une série numérique ? Comment lit-on cette (ces) notation(s) ?
4. Que signifie « grossièrement divergente » ?
5. Cas de la série géométrique.
6. Quel lien y a-t-il entre suite et série ?
7. Exemple des séries de Riemann ?
8. Techniques d'étude des séries à termes positifs ?
9. Techniques d'étude des séries à termes de signes quelconques, ou complexes ?
10. $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 10^{10}} u_n$ sont-elles de même nature ? En cas de convergence, leurs sommes sont-elles égales ?
11. Il y a quoi dans le chapitre « analyse asymptotique » de première année ?
12. Quel est le coefficient du terme de degré $k \in [\![0\,,n+p]\!]$ dans le produit $\left(\sum\limits_{i=0}^{p} a_i X^i\right)\left(\sum\limits_{j=0}^{n} b_j X^j\right)$?

La théorie des séries a pour but de donner (si c'est possible) un sens à la somme d'une infinité de nombres.
$\underbrace{1+1\dots}_{\text{une infinité de termes}}$, $\underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots}_{\text{une infinité de termes}}$ n'existent pas ; par contre $\underbrace{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots}_{\text{une infinité de termes}}$, $\underbrace{\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\dots}_{\text{une infinité de termes}}$ existent.

I. Généralités sur les séries numériques

I.1 Définitions

I.1.a Sommes partielles

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.
Étudier la **série de terme général** u_n, c'est étudier la **suite** de terme général S_n, où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \ .$$

S_n est la **somme partielle d'ordre** n (ou de rang n) de la série.
(S_n est donc la somme des $n+1$ premiers termes de u)

I.1.b Convergence ; divergence ; somme

Définition

On dit que **la série de terme général** u_n **converge** ssi la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
On écrit parfois que la série $\sum u_n$ converge, ou que la série $\sum_n u_n$ converge (si plusieurs lettres interviennent dans l'expression de u_n), ou que la série de terme général u_n converge, ou que la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ converge.
On dit que **la série de terme général** u_n **diverge** ssi la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Définition

Étudier la **nature de la série** $\sum u_n$, c'est déterminer si cette série converge ou diverge.

- Dans le cas de convergence, la limite de la suite des sommes partielles est appelée **somme** de la série $\sum u_n$, et est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. On a donc
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{p\to+\infty}\left(\sum_{n=0}^{p} u_n\right) \text{ lorsque cette limite existe.}$$
- Une série divergente n'a pas de somme. L'écriture $\cancel{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n}$ n'a alors pas de sens.

Remarques.

1. *Deux séries sont dites de même nature ssi elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.*

2. ⚠ *Ne pas confondre* $\sum u_n$, *qui désigne la série elle-même (toujours définie) et* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *qui désigne,* ***en cas de convergence seulement****, la somme de cette série, i.e. la limite de la suite de ses sommes partielles.*
   Il y a donc la même différence entre ces notations qu'entre $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $\lim_{n\to+\infty} u_n$ *pour les suites.*
   On ne doit donc se permettre d'écrire ce symbole $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *qu'une fois démontrée la convergence de la série.*

3. ⚠ *La somme d'une série n'est pas une somme… mais la limite d'une suite de sommes !*

Proposition. (1)
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$; soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$.
Les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ sont de même nature, et si elles convergent, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$$

Ainsi, la nature d'une série n'est pas modifiée quand on change l'indice de départ ;
par contre, en cas de convergence, la somme peut être modifiée.

Preuve.

1. On suppose que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge : alors, puisque $\forall n \geqslant n_0$, $\sum_{k=n_0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k$, $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ converge et $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n$.

2. On suppose que $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ converge : alors, comme $\forall n \geqslant n_0$, $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{n} u_k$, $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

□

Proposition. (2)
Deux séries qui ne diffèrent que par un nombre fini de termes sont de même nature.
Si on modifie un nombre fini de termes d'une série, on ne modifie pas sa nature.

Preuve. Considérer $n_0 = \mathrm{Max}\{k \in \mathbb{N} / \ u_k \neq v_k\}$ et appliquer la proposition précédente. □

I.1.c Un premier exemple : les séries géométriques complexes

Soit q un nombre complexe.
On peut étudier la nature de la série $\sum q^n$ en calculant les sommes partielles.
En effet, si $q = 1$, alors $\forall n$, $S_n = n + 1$, donc la série $\sum q^n$ diverge.
Si $q \neq 1$, alors $\forall n$, $S_n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$, donc la série $\sum q^n$ converge ssi $|q| < 1$.

I.2 Condition nécessaire de convergence ; divergence grossière

Proposition. (3)

Pour que $\sum u_n$ converge, il est $\boxed{\text{nécessaire}}$ que la suite (u_n) converge vers 0.
Autrement dit, $\boxed{\text{si}}$ la série $\sum u_n$ converge, $\boxed{\text{alors}}$ $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Si ce n'est pas le cas (autrement dit si $u_n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$), on dit que la série $\sum u_n$ **diverge grossièrement**.

La réciproque est fausse !
Par exemple, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge, bien que son terme général tende vers 0.
Autre exemple : série de terme général $u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$.

I.3 Correspondance suites-séries

Étudier la convergence d'une série, c'est étudier la convergence d'une suite, à savoir la suite de ses sommes partielles.
Réciproquement, toute suite peut être écrite comme suite des sommes partielles d'une certaine série : en effet, on remarque que si on pose $v_0 = u_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n - u_{n-1}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$.
Conclusion :

Proposition. (4)

La nature (convergente, divergente) de la suite (u_n) est équivalente à celle de la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$.

Remarques. • *On parle parfois de télescopage.*
• *L'application $f : u \mapsto S$ est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ car linéaire et bijective : en effet tout élément S de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ admet un unique antécédent u par f déterminé par:* $\begin{cases} u_0 = S_0 \\ \forall n \geqslant 1,\ u_n = S_n - S_{n-1} \end{cases}$

I.4 Espace vectoriel des séries convergentes

Proposition. (5)

Si les séries de terme général respectif u_n et v_n convergent dans $\mathbb{K}$, si $\lambda \in \mathbb{K}$,
alors la série de terme général $\lambda u_n + v_n$ converge, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Autrement dit, l'ensemble $F = \left\{ (u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} / \sum u_n \text{ converge} \right\}$ est un espace vectoriel, sous-espace de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, et l'application $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est linéaire de F dans $\mathbb{K}$.

Une série $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$ peut être convergente sans qu'aucune des 2 séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ne le soit ! On ne peut donc pas « couper des sommes infinies » en deux aussi simplement qu'avec des sommes finies...

Proposition. (6)

Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum (u_n + v_n)$ diverge.

On ne peut rien dire de la somme de deux séries divergentes.

I.5 Cas des séries complexes

Proposition. (7)

Si (u_n) est une suite de nombres complexes,

$\sum u_n$ converge si et seulement si les deux séries de réels $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ convergent
ou encore,
si et seulement si la série de complexes $\sum \overline{u_n}$ converge

et en cas de convergence, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(u_n)\right) + \mathrm{i}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(u_n)\right) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{u_n} = \overline{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n}$$

I.6 Restes d'une série convergente

On considère ici une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$. On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de ses sommes partielles, qui converge donc vers S, somme de la série.

Définition

Soit $p \in \mathbb{N}$;
on appelle **reste d'ordre** p (ou de rang p) de la série convergente $\sum u_n$ l'élément de $\mathbb{K}$:

$$R_p = S - S_p$$

La suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des restes de la série convergente $\sum u_n$. Elle converge vers 0 $\left(R_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0\right)$.

Remarque. *On peut écrire : soit $n \in \mathbb{N}$*

$$\begin{aligned}
R_n &= S - S_n \\
&= \lim_{p\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{p} u_k\right) - \sum_{k=0}^{n} u_k \\
&= \lim_{p\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{p} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k\right) \quad \textit{th op. sur les limites} \\
&= \lim_{p\to+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{p} u_k\right)
\end{aligned}$$

R_n s'écrit donc comme somme d'une série (convergente, bien entendu) : $\boxed{R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k}$

Parfois, puisque $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et pour « prolonger » la formule précédente, on définit R_{-1} par : $R_{-1} = S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exemple. La série $\sum z^n$ est convergente si et seulement si $|z| < 1$.
Si $|z| < 1$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$ donc $S = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z}$ et $R_n = \dfrac{z^{n+1}}{1-z}$.

Pour une série divergente, on ne peut pas définir de restes.

II. Séries à termes réels $\boxed{\text{positifs}}$

Rq. • *La nature d'une série tronquée étant la même que celle de la série initiale, l'étude des séries réelles dont les termes ne sont positifs qu'à partir d'un certain rang se ramène à l'étude de celles dont tous les termes sont positifs.*
• *De plus, deux séries opposées ($\sum u_n$ et $\sum(-u_n)$) sont de même nature.*
• *En résumé, l'étude des séries réelles dont les termes sont* ***de signe constant à partir d'un certain rang*** *se ramène à l'étude des séries à termes positifs, à partir du rang 0.*
Dans la suite de ce paragraphe, on va donc énoncer des résultats concernant les séries à termes positifs dès le rang 0, résultats qui ont leur transcription pour des séries réelles à termes de signe constant (à partir du rang 0 ou à partir d'un certain rang n_0).

Remarque. *Toutes les propriétés des séries à termes positifs vont reposer sur la proposition suivante :*

Proposition. *(8)*

Si $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_n \geqslant 0$, alors la suite $(S_n)_{n\geqslant 0} = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\geqslant 0}$ est croissante.

II.1 Critère de convergence

Théorème. (9)

> On suppose que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0}$.
> Alors la série $\sum u_n$ converge $\iff$ la suite (S_n) est majorée.
> De plus, en cas de convergence, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \operatorname{Sup}_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$ (mais il s'agit là d'une valeur « théorique »).

Preuve. Puisque $\forall n\,,\ u_n \geqslant 0$, (S_n) est une suite réelle croissante,
donc par théorème de limite monotone, elle converge si et seulement si elle est majorée. □

Exemple. $\sum_{\geqslant 1} \frac{\mathrm{e}^{-n}}{n}$ est convergente.

Ce théorème est faux si la suite (u_n) n'est pas de signe constant...(cf $\sum(-1)^n$ qui diverge grossièrement et pour laquelle $\forall n\,,\ 0 \leqslant S_n \leqslant 1$!!!)

Remarques.

1. *Si $\forall n\,,\ u_n \geqslant 0$ et si $\sum u_n$ converge, alors $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = S$.*
2. *Si une série à termes positifs est divergente, alors $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = +\infty$.*

II.2 Règles de comparaison

II.2.a Majoration - Minoration

Théorème. (10)

> On suppose que $\boxed{\forall n \geqslant 0,\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n}$.
>
> 1. Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

2. Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

II.2.b Domination

Théorème. (11)

On suppose que $\boxed{\forall n \geqslant 0,\ u_n \geqslant 0,\ v_n \geqslant 0 \ \text{ et } u_n = \mathcal{O}(v_n)}$.

1. Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Remarque. *Puisque $u_n = o(v_n) \implies u_n = \mathcal{O}(v_n)$,*
le théorème précédent s'applique a fortiori dans le cas où $u_n = o(v_n)$ (et $\forall n \geqslant 0,\ u_n \geqslant 0,\ v_n \geqslant 0$).

II.2.c Équivalent

Théorème. (12)

On suppose que $\boxed{\forall n \geqslant n_0,\ v_n \geqslant 0}$.
Si $u_n \sim v_n$ alors les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

L'hypothèse $v_n \geqslant 0$ est essentielle et on veillera bien à ne pas appliquer ce théorème à des séries à termes complexes ou à termes réels de signe variable ...

II.2.d Application aux séries de Riemann

Théorème. (13)

La **série de Riemann** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Preuve.

- Si $\alpha \leqslant 0$, alors $\dfrac{1}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$, donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge (grossièrement).
- Si $\alpha = 1$, alors $\forall n \geqslant 1\,,\ S_{2n} - S_n \geqslant n\dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2}$, donc si (S_n)convergeait vers ℓ, (S_{2n}) convergerait aussi vers ℓ, et par passage à la limite dans l'inégalité, on aurait $0 \geqslant \dfrac{1}{2}$!!! donc (S_n) diverge i.e. $\boxed{\sum \frac{1}{n} \text{ diverge}}$.
- Si $0 < \alpha < 1$, alors $\forall n \geqslant 1\,,\ \dfrac{1}{n^\alpha} \geqslant \dfrac{1}{n} > 0$, et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge,
  donc par théorème de minoration pour les séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.
- Si $\alpha > 1$, on a pour tout $k \geqslant 2\,,\ \dfrac{1}{k^\alpha} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}}\right)$.
  D'où $S_n - 1 = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}}\right) = \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \leqslant \frac{1}{\alpha-1}$, donc $(S_n - 1)$ est

majorée par $\dfrac{1}{\alpha-1}$,

donc (S_n) est majorée par $1+\dfrac{1}{\alpha-1}$ et est croissante (car $\forall n \geqslant 1\,,\ \dfrac{1}{n^\alpha} > 0$) donc (th. lim. monotone) converge.

□

II.2.e Comparaison à une série de Riemann

Remarque. *Les séries de Riemann sont des séries de référence : l'étude d'une série numérique se ramène souvent à comparer celle-ci avec une série de Riemann.*

Il faut savoir justifier ces résultats à chaque utilisation (règle appelée du $n^\alpha u_n$) :

Soit $\boxed{\sum u_n \text{ une série de terme général réel positif}}$.

- S'il existe $\alpha > 1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit majorée , alors la série $\sum u_n$ converge.

Donc en particulier, s'il existe $\alpha > 1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.

- S'il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit minorée par $m > 0$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

En particulier, s'il existe $\alpha \leqslant 1$ t.q. $(n^\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell > 0$ ou diverge vers $+\infty$, alors $\sum u_n$ diverge.

II.2.f Exemple des séries de Bertrand

Savoir retrouver le résultat suivant, souvent utile (la dém. utilise le §II.4) :

Soient $(\alpha\,,\beta) \in \mathbb{R}^2$; la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ converge <u>ssi</u> $[\ \alpha > 1 \ \text{ ou } \ (\alpha = 1 \ \text{ et } \beta > 1)]$.

Au passage, on a un résultat sur l'intégrabilité des fonctions de Bertrand (h.p. mais très classique...) :

$t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha \ln^\beta(t)}$ est intégrable sur $[2\,,+\infty[\iff [\ \alpha > 1 \ \text{ ou } \ (\alpha = 1 \ \text{ et } \beta > 1)]$

II.3 Séries géométriques

II.3.a Rappels

Théorème. (14)

La série géométrique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} r^n$ converge ssi $|r| < 1$; de plus, si $|r| < 1$, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$.

Remarque. *Si* $|r| < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} r^k = r^{n+1}\sum_{p=0}^{+\infty} r^p = \frac{r^{n+1}}{1-r}$.

II.3.b Développement décimal d'un réel positif ou nul

Définition

Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

On appelle **développement décimal** de x toute suite (d_n) telle que : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ d_n \in \mathbb{N} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant d_n \leqslant 9 \\ x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} d_n 10^{-n} \end{cases}$

et on écrit alors $x = d_0\,,d_1d_2\ldots d_n\ldots$

On remarque que la deuxième condition assure la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} d_n 10^{-n}$.

Comme $0 \leqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} d_n 10^{-n} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} 9\,.10^{-n} = 9\frac{1}{10}\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 1$
et comme cette somme vaut 1 ssi $\forall n \geqslant 1\,,\ d_n = 9$,
on a (sauf si $\forall n \geqslant 1\,,\ d_n = 9$) $d_0 = \lfloor x \rfloor$.
On peut donc se ramener au cas où $x \in [0\,,1[$.

- **Existence** : soit $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_n = 10^{-n}\lfloor 10^n x\rfloor$ et $v_n = u_n + 10^{-n}$.
  On montre alors que u et v sont adjacentes, puis qu'elles convergent vers x.
  Puis on montre que $\lfloor 10^n u_{n+1}\rfloor = 10^n u_n$.
  Enfin, en posant $d_0 = 0$ et pour $n \geqslant 0\,,\ d_{n+1} = 10^{n+1}(u_{n+1} - u_n)$, on a $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} d_k 10^{-k}$, d'où l'existence d'un développement décimal pour x.
- **Étude de l'unicité** : il n'y a pas unicité en général (cf $\dfrac{1}{10} = 0\,,10000\ldots0\ldots = 0\,,099\ldots9\ldots$)
  On peut cependant montrer que si x est décimal non nul, alors x admet deux développements décimaux $x = d_0\,,d_1d_2\ldots d_N0\ldots0\ldots = d_0\,,d_1d_2\ldots d_{N-1}e_N9\ldots9\ldots$ où $e_N \in \{0,\ldots,8\}$ et $d_N = e_N + 1$
  et si x n'est pas décimal, alors x admet un unique développement décimal.
- Il est possible de démontrer que le développement décimal d'un nombre rationnel est périodique, autrement dit que la suite (d_n) est périodique à partir d'un certain rang :

  Exemple. la suite associée au développement décimal de $\dfrac{1}{3}$ (suite constante à partir du rang 1, donc périodique) ou encore $\dfrac{3}{13} = 0\,,230769230769230769\ldots$.

II.3.c Méthode de d'Alembert : comparaison avec une série géométrique

Cette règle est mentionnée dans le programme. Nous la traitons donc en cours. Mais c'est un résultat peu utile pour l'étude des séries numériques, et il ne doit pas cacher le principe du résultat : on compare le terme général de la série à étudier à une série de référence – ici, une série géométrique.

Remarque. *Savoir retrouver rapidement la proposition suivante (qui est surtout utile pour démontrer la règle de D'Alembert) :*

Proposition. (15)

- S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $k \in [0\,,1\boxed{[}$ tels que $\forall n \geqslant n_0\,,\ u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant k$,
  alors la série $\sum u_n$ converge et $\forall n \geqslant n_0\,,\ 0 \leqslant R_n \leqslant \dfrac{k}{1-k}\,u_n$
- Si $\forall n \geqslant n_0\,,\ u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Règle de d'Alembert. (16)

Soit $\sum u_n$ une série à termes > 0. On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}^+$.

1. si $\ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge
2. si $\ell > 1$ ou si $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers 1^+, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement
3. si $\ell = 1$, alors on ne peut pas conclure.

   Exemple. $\forall n \geqslant 1\,,\ u_n = \dfrac{1}{n}$ ou $u_n = \dfrac{1}{n^2}$

Remarques.

1. *Appliquer la règle de d'Alembert à une série à termes > 0 revient à comparer cette série à des séries géométriques.*
2. *On essaiera d'appliquer la règle de d'Alembert lorsque le terme général u_n contient des exponentielles ou des puissances.*

   Exemple. $\sum \dfrac{n!}{n^n}$
3. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \not\Rightarrow \sum u_n$ *converge (on peut avoir alors* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$*)*
4. *Si* $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ *n'a pas de limite, il se peut que* $\sum u_n$ *converge ou diverge.*

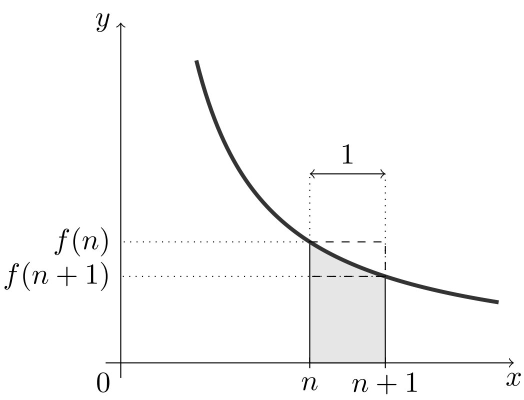
   Exemple. $u_n = (2+(-1)^n)2^{-n}$ *ou* $u_n = 2+(-1)^n$.
5. *Les réciproques sont fausses :* $\sum u_n$ *converge* $\not\Rightarrow$ $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ *admet une limite* ℓ *(et* $\ell < 1$*).*

   ☞ *Contre-exemple :* $u_n = \dfrac{1}{2^n}$ *si* n *est pair et* $u_n = \dfrac{1}{3^n}$ *si* n *est impair.*

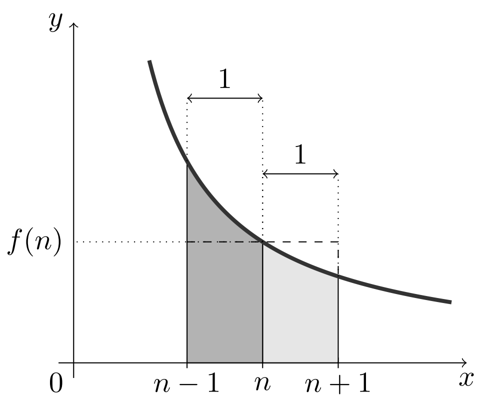
II.4 Comparaison d'une série à une intégrale

Lemme. (17)

Soit $f : [n_0\,,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et décroissante.
Pour $n \geqslant n_0+1$, sur les figures suivantes, on « voit » des encadrements :



$$f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n)$$



$$\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Soit $N \geqslant n_0 + 1$: en sommant ces inégalités (en nombre fini), on obtient :

$$\sum_{n=n_0+1}^{N} f(n) \leqslant \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=n_0}^{N-1} f(n) \quad \text{et} \quad \int_{n_0+1}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=n_0+1}^{N} f(n) \leqslant \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Comparaison portant sur un nombre fini de termes !

Remarques. • *L'utilisation d'un schéma facilite l'obtention de ces inégalités.*

• *De ces 2 inégalités, on déduit (si besoin) un encadrement de* $\int_p^q f$ *!*

• *On a bien sûr quelque chose de similaire avec une fonction* $\mathcal{CM}$ *et croissante !*

Théorème. (18)

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, soit $f : [n_0\,, +\infty[\to \mathbb{R}$ une application continue par morceaux, $\boxed{\text{positive}}$ et décroissante sur $[n_0\,, +\infty[$.

La série $\sum_{n \geqslant n_0} f(n)$ converge ssi f est intégrable sur $[n_0\,, +\infty[$, c'est-à-dire $\int_{n_0}^{\to +\infty} f$ converge, et en cas de convergence de la série ou de l'intégrale, on a :

$$\forall n \geqslant n_0,\ \int_{n+1}^{+\infty} f \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_{n}^{+\infty} f$$

Remarques.
- *En cas de convergence de* $\sum f(n)$*, on a un encadrement des* *restes* *via des intégrales.*
- *En cas de divergence de* $\sum f(n)$*, le lemme précédent permet d'obtenir un équivalent des* *sommes partielles* *via des intégrales.*
- *Toujours présenter un schéma pour illustrer les inégalités annoncées.*

Une application directe. Pour les fonctions de Riemann : $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ et $\alpha > 0$, on a décroissance, continuité et positivité sur $[1\,, +\infty[$ et

$\star$ si $\alpha > 1$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$

$\star$ si $0 < \alpha < 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

En déduire la nature de la série de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$

Un autre exemple. Déterminer un équivalent de $S_n = \dfrac{1}{2\ln 2} + \dfrac{1}{3\ln 3} + \ldots + \dfrac{1}{n\ln n}$.

Exemple. La formule de Stirling

En utilisant les formules de Wallis et la comparaison série-intégrale appliquée à la fonction $g : \begin{array}{ccc} [1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \ln t \end{array}$, on montre la formule de Stirling (à connaître !)

$$\boxed{n! \sim \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}}$$

Application : trouver un équivalent de $u_n = \dfrac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}(2n-1)}$

III. Cas général

Dans ce paragraphe, u est

soit une suite de complexes

soit une suite de réels signe qcq

III.1 Convergence absolue

III.1.a Généralités

Définition

On dit que la série de terme général u_n converge absolument dans $\mathbb{K}$ si et seulement si la série de terme général $|u_n|$ converge (dans $\mathbb{R}^+$).

Proposition. (19)

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors pour tout scalaire $\lambda (\in \mathbb{K})$, $\sum (u_n + \lambda v_n)$ est absolument convergente.

Preuve. Il suffit de remarquer que $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ |u_n + \lambda v_n| \leqslant |u_n| + |\lambda||v_n|$ et d'appliquer le théorème de majoration pour les séries à termes positifs. □

Remarque. *L'ensemble $\ell^1(\mathbb{K}) = \{u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \,/\, \sum u_n$ soit absolument convergente$\}$ est donc d'après la proposition précédente un $\mathbb{K}$-ev et l'application* $\begin{array}{ccc} \ell^1(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \end{array}$ *est une norme sur $\ell^1(\mathbb{K})$.*

III.1.b Condition suffisante de convergence

Proposition. (20)

Dans $\mathbb{K}$, toute série absolument convergente est convergente et $\left|\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

Autrement dit, la convergence absolue est une condition suffisante de convergence.

Remarque. *La réciproque du théorème précédent est fausse : il existe des séries convergentes et non absolument convergentes.* Une série convergente et non absolument convergente est dite **semi-convergente**.

Exemple. *séries de Riemann alternées :* $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ *pour* $\alpha \in]0\,,1]$.

Proposition. (21)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes dans $\mathbb{K}$.

Si $\begin{cases} \sum v_n \text{ est absolument convergente} \\ |u_n| = \mathcal{O}(|v_n|) \end{cases}$, alors $\sum u_n$ est absolument convergente.

Exemple. $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n \sqrt{n} + \sin n}{n^2}$ est absolument convergente.

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries telles que $\sum v_n$ converge et $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, on ne peut pas déduire que $\sum u_n$ converge :
☞ $\forall n \geqslant 1\,,\ u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

III.1.c Un exemple de produit scalaire

Proposition-Définition. (22)
L'ensemble $\ell^2(\mathbb{R}) = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,/\, \sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^2 \text{ convergente}\}$ est un $\mathbb{R}$-ev

et l'application $(u\,,v) \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ est un produit scalaire sur ce $\mathbb{R}$-ev.
On note N_2 la norme associée :

$$\forall u \in \ell^2(\mathbb{R}),\ N_2(u) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Remarque. *On a $\ell^1 \subset \ell^2$:*
en effet, si $\sum |u_n|$ converge, alors $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc à partir d'un certain rang, $|u_n| \leqslant 1$ donc $u_n^2 \leqslant |u_n|$ et donc par comparaison à des séries positives, $\sum u_n^2$ converge.

III.2 Séries alternées New

On s'intéresse dans ce paragraphe à des séries à termes réels.

III.2.a Théorème de Leibniz, dit théorème spécial des séries alternées

Définition
On dit qu'une série $\sum u_n$ à termes réels est **alternée** si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n |u_n|$ ou $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -(-1)^n |u_n|$

ou encore :
une série réelle est dite **alternée** lorsqu'elle est de la forme :

$$\sum (-1)^n v_n$$

où $\forall n\,,\ \text{signe}(v_n) = \text{signe}(v_0)$.
Ainsi, une série alternée est une série dont le terme général change de signe à chaque changement d'indice.

Remarques.

1. *Il est clair qu'un cas se ramène à l'autre en changeant u en $-u$.*
2. *Dans la pratique, l'alternance des signes des termes de la suite u pourra n'être effective qu'à partir d'un rang n_0.*
3. *Concrètement, les séries alternées se présenteront sous la forme : $\sum (-1)^n v_n$ où v est un suite de réels de signe constant (au moins à partir d'un certain rang).*
4. *(u_n) est alternée lorsque le produit de 2 termes consécutifs de la suite est négatif : $\forall n\,,\ u_{n+1} \times u_n \leqslant 0$ ou encore lorsque la suite $((-1)^n u_n)$ est de signe constant.*

Critère de Leibniz ou théorème spécial des séries alternées. (23)

Soit u une suite de réels positifs et $\sum(-1)^n u_n$ une série alternée de réels.

Si $\begin{cases} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante} \end{cases}$ alors $\sum\limits_n (-1)^n u_n$ est convergente.

Exemple. Déterminer la nature de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

Remarque. *Bien sûr, toutes les hypothèses de ce théorème sur les séries alternées sont fondamentales.*

Contre-exemple 1. *si* $u_n = \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$, *alors* $\sum u_n$ *est alternée,* u *converge vers* 0, *mais* $|u|$ *n'est pas décroissante et* $\sum u_n$ *ne converge pas.*

Contre-exemple 2. *si* $u_n = (-1)^n(1+\frac{1}{n+1})$, *alors* $\sum u_n$ *est une série alternée,* $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)_n$ *est décroissante, mais* $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)_n$ *ne converge pas vers* 0 *et* $\sum u_n$ *ne converge pas.*

Contre-exemple 3. *si* $u_n = \dfrac{1}{n+1}$, *alors* u *est décroissante,* u *converge vers* 0, *mais* $\sum u_n$ *n'est pas alternée et* $\sum u_n$ *ne converge pas.*

III.2.b Majoration du reste d'une série alternée vérifiant le critère de leibniz

Tout aussi important que le critère de Leibniz !!!

Théorème. (24)

Soit u une suite positive.

• Si la série alternée $\sum(-1)^n u_n$ vérifie les hypothèses du théorème des séries alternées, alors, pour tout $n \geqslant 0$, $R_n = S - S_n$ a le signe de $(-1)^{n+1}u_{n+1}$ et $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$.

• Si la série alternée $\sum(-1)^n u_n$ vérifie les hypothèses du théorème des séries alternées à partir du rang 0, alors $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est du signe de u_0 et $|S| \leqslant |u_0|$.

Remarque. *Cela signifie que, lorsque le TSSA s'applique, le reste est majoré par son premier terme, en valeur absolue, et il est du signe de ce premier terme. Cela permet d'estimer a priori l'erreur commise lorsque l'on approxime* S *par* S_n.

III.2.c Exemple des séries de Riemann alternées

Proposition. (25)

$\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

$\alpha \le 0$	$0 < \alpha \le 1$	$\alpha > 1$
divergente	semi-convergente	absolument convergente

Nature de $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$

III.2.d Une autre application classique

Le 2[ème] théorème sur les séries alternées permet d'obtenir un encadrement (via une somme partielle) de la somme, de longueur ε (i.e. de trouver a tel que $a \leqslant S \leqslant a+\varepsilon$) !

Exemple. Après avoir justifié la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$, déterminer un entier naturel n_0 pour lequel $|S_n - S| \leqslant 10^{-2}$ et en déduire un encadrement de S de longueur 10^{-2}.

III.3 Méthode par éclatement New

Si $u_n \sim v_n$ et que $\sum v_n$ vérifie le TSSA, on ne peut pas en déduire que $\sum u_n$ converge, car son terme général n'est pas de signe constant (et donc on ne peut pas appliquer le th. d'équivalence réservé aux séries à termes de signe constant). Ces exemples relèvent plutôt de la méthode d'éclatement.

Principe de la méthode par éclatement : effectuer un développement asymptotique de u_n et mettre ensuite u_n sous la forme $\boxed{u_n = v_n + w_n}$ de sorte que $\sum v_n$ converge. Alors la nature de $\sum u_n$ est la même que celle de $\sum w_n$.
En général, le reste du développement asymptotique doit être pris en compte dans le terme w_n ; et w_n pourra lui aussi être « éclater » si besoin est.

Exemples.
- Nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.
- Nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

III.4 Produit de deux séries complexes absolument convergentes New

Problème : on donne deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ réelles ou complexes, convergentes, de somme U et V.
On cherche une série $\sum w_n$, convergente, et dont la somme soit UV (i.e telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$).

Remarque. *L'idée « évidente » de prendre $w_n = u_n v_n$ ne convient pas :*

Exemple. *$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n = \frac{1}{2^n}$; alors $\sum u_n$ converge et $U = V = \frac{1}{1-1/2} = 2$.*
Et $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n = u_n v_n = \frac{1}{4^n}$, donc $\sum t_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} t_n = \frac{1}{1-1/4} = \frac{4}{3} \neq UV = 4$.

III.4.a Produit de séries au sens de Cauchy

Définition

Considérons 2 séries de termes généraux respectifs u_n et v_n.
On note $w_n = \sum_{p+q=n} u_p . v_q = \sum_{k=0}^{n} u_k . v_{n-k}$.
La suite w ainsi définie est notée $u * v$ et s'appelle le **produit de convolution de** u **et** v.
La série $\sum w_n$ est alors appelée **produit de Cauchy** des deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

III.4.b Le théorème de base

Théorème. (26)

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont 2 séries numériques (complexes ou réelles) absolument convergentes alors leur « série produit de Cauchy » $\sum w_n$ converge absolument et $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$

Preuve. Non exigible, on ne la fait donc pas. (Elle sera en annexe sur le site) □

Application. $\forall (z\,,z') \in \mathbb{C}^2\,,\ \exp(z+z') = \exp(z)\exp(z')$.

Preuve. Pour tout z complexe, $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ est absolument convergente, de somme $\exp(z)$.
Soient $(z\,,z') \in \mathbb{C}^2$; alors, d'après le th. précédent, $\sum w_n$ est absolument convergente et a pour somme $\exp(z)\exp(z')$.
Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\frac{z'^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^k z'^{n-k} = \frac{1}{n!}\left(z+z'\right)^n$; d'où $\exp(z)\exp(z') = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(z+z'\right)^n =$ $\exp(z+z')$. □

Le produit de Cauchy de 2 séries convergentes (mais pas abs. cv.) n'est pas nécessairement une série cv (cf produit de Cauchy de $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ par elle-même)

Remarque. *Le contexte naturel d'utilisation du produit de Cauchy de deux séries est celui des séries entières.*

Exemple. Convergence et, éventuellement, somme de la série de t.g. $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 2^{n-k}}$.

IV. Exercices et résultats classiques à connaître

IV.1 Constante d'Euler, développement asymptotique de la série harmonique

Exo 1 On considère la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$$

En utilisant le lien suite-série, montrer que $(u_n)_n$ converge.
On note traditionnellement γ sa limite, appelée ***constante d'Euler****, et on a donc établi :*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

IV.2 Une transformation d'Abel

Exo 2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \sin k \text{ et } S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{k}$$

(1) Montrer que $(\sigma_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée.

(2) En déduire que $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

IV.3 Utiliser une comparaison série-intégrale

Exo 3 Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

Remarques générales :

- On ne doit pas parler de la somme d'une série avant d'avoir établi sa cv ; autrement dit, on n'utilisera le symbole $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ qu'$\boxed{\text{après}}$ avoir montré la cv de la série de terme général u_n.
- Commencer par bien identifier la situation : est-ce une série à termes réels positifs (éventuellement à partir d'un certain rang) ? Est-ce une série alternée ? ...

Quelques techniques d'étude de convergence :

- Via **le calcul des sommes partielles** (rarement possible !), on se ramène à une étude de suite
- La technique précédente permet de ramener explicitement l'étude d'une série à l'étude d'une suite. Mais c'est plutôt l'inverse qui est important : étudier la suite (u_n), c'est étudier la série $\sum v_n$ avec $v_n = u_{n+1} - u_n$ (série parfois appelée télescopique). C'est une idée fondamentale.
- **Utilisation de la règle de d'Alembert :** rare dans les exercices, elle intervient surtout pour quelques séries fondamentales (série exponentielle par exemple). On y pense quand le terme général contient des factorielles, des puissances et des termes qui se simplifient bien lorsque l'on effectue le quotient u_{n+1}/u_n. Ne marche que pour des $\boxed{\text{séries strict. positives au moins à partir d'un certain rang}}$; si ce n'est pas le cas, mettre des valeurs absolues ou des modules, en espérant la cv abs. !
- **Utilisation d'un équivalent :** surtout ne l'utiliser que pour $\boxed{\text{des suites qui sont réelles positives}}$ (une erreur classique est de l'utiliser pour une série alternée).
- $\boxed{\textbf{Théorème des séries alternées}}$: on reconnaît souvent facilement une série alternée (mais il ne faut pas se laisser leurrer par un simple $(-1)^n$), et bien vérifier que toutes les conditions d'application du théorème sont réunies, éviter par exemple d'appliquer le théorème à des suites complexes non réelles, à des suites réelles dont la valeur absolue ne décroît pas... ; bien se souvenir également de la majoration du reste, souvent utile.
- $\boxed{\textbf{Majoration de la v. abs. (ou du module) du t.g.}}$ ou du terme général lui-même pour les séries positives : c'est bien $|u_n|$ (ou u_n pour une série positive) que l'on majore, pas S_n ; il est incorrect d'écrire par exemple
$$\sum_{i=0}^{n} u_i| \leqslant \sum_{i=0}^{n} |u_i| \leqslant \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} \text{ or la série } \sum \frac{1}{2^n} \text{ cv donc } \sum u_n\text{, abs. cv, est cv}$$
et, encore plus incorrect :
$$\sum_{i=0}^{+\infty} u_i| \leqslant \sum_{i=0}^{+\infty} |u_i| \leqslant \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \text{ qui a un sens donc } \sum u_n\text{, abs cv, est cv.}$$
Bonne rédaction : à partir d'un certain rang, on a $|u_n| \leqslant 1/2^n$, donc, par th de comparaison pour les S.A.T.P.(la série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in [0\,,1[$ cv), $\sum |u_n|$ cv donc $\sum u_n$ cv.
- $\boxed{\textbf{Utilisation d'un } o \textbf{ ou d'un } \mathcal{O}}$: même chose que ce qui précède. Comme $u_n = o(\dots)$ et $|u_n| = o(\dots)$ signifient la même chose, c'est une technique de démonstration d'absolue cv.
- **Utilisation d'un développement asymptotique :** dans le cas d'une série qui n'est pas positive, permet de pallier l'impossibilité de conclure avec un équivalent.
- **Comparaison à une intégrale :** $\boxed{\text{pour les suites réelles positives}}$. Bien écrire $u_n = f(n)$, où f est l'application $x \longmapsto \dots$, puis on étudie les propriétés de cette application.
- Et si on veut calculer la somme ? C'est rarement possible, et dans un certain nombre de cas, le plus commode est d'utiliser un développement en série entière connu (voir chapitre sur les séries entières). Quelques idées néanmoins : décomposer u_n en éléments simples quand u_n est une fraction rationnelle de n, se ramener à une série géométrique, ou exponentielle, grouper des termes (paquets), utiliser astucieusement le théorème sur les séries alternées...

Exo 4

Applications directes du cours ; les questions sont indépendantes.

(1) Quelle est la nature de la série $\sum \dfrac{1}{2+\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)}$?

(2) Quelle est la nature de la série $\sum \dfrac{n}{(3n+1)!}$?

(3) Prouver la cv de $\sum \mathrm{e}^{-2n}\mathrm{ch}n$ et calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2n}\mathrm{ch}n$.

(4) Montrer la cv de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ et calculer sa somme.

Idem avec $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \frac{2n-1}{n^3-4n}$.

(5) Cv et calcul de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$.

(6) Cv et calcul de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

(7) Montrer la convergence de $\sum (n+1)3^{-n}$ et calculer sa somme.

(8) Étudier la convergence de la série $\sum \dfrac{(i-1)\sin\frac{1}{n}}{\sqrt{n}-1}$. (i est ici le nombre complexe de carré égal à -1).

Exo 5

Déterminer la nature des séries numériques suivantes :

$$v_n = (-1)^n \frac{\ln n}{n} \qquad w_n = (-1)^n \mathrm{Arcsin}\frac{1}{n}$$

$$k_n = \frac{(-1)^n}{n^{3/4}+(-1)^{n+1}} \qquad \ell_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$$

$$b_n = \sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1} \qquad d_n = \frac{1}{n^\alpha}\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}}$$

Exo 6

Déterminer la nature des séries suivantes, sans chercher à calculer la somme lorsqu'il y a convergence :

(1) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$

(2) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$

(3) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \mathrm{e}^{-\sqrt{\ln n}}$

(4) $\sum \sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n}$

(5) $\sum \mathrm{Arccos}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$

(6) $\sum \dfrac{1}{n\ln n}$

(7) $\sum \sin\left(\dfrac{n^2}{n+1}\pi\right)$

(8) $\sum \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$

(9) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n n^\beta}$

Exo 7

Quelle est la nature des séries de terme général $u_n = \displaystyle\int_n^{2n} \frac{\mathrm{d}t}{1+t\sqrt{t}}$ et $v_n = \displaystyle\int_0^{\pi/n} \frac{\sin^3 x}{1+x}\mathrm{d}x$?

Exo 8

Étudier la série numérique $\sum u_n$ lorsque :

(1) $u_n = \dfrac{1}{n^2 \ln n}$

(2) $u_n = \dfrac{\ln n}{n^2}$

(3) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}\ln n}$

(4) $u_n = \dfrac{1}{n \ln n}$

(5) $u_n = \dfrac{1}{n \ln^2 n}$

(6) $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

(7) $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$

Exo 9

Pour $\alpha > 0$ fixé, on considère la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{-u_n} \end{cases}$$

(1) Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(2) En étudiant la suite de ses sommes partielles, étudier la série de terme général u_n.

Exo 10

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$$

On décide de convenir $u_0 = 0$.
On définit une autre suite $(v_n)_n$ en posant :

$$v_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = u_n - u_{n-1}$$

Déterminer un équivalent de v_n.
Utiliser $\sum v_n$ pour en déduire la convergence de $(u_n)_n$.

Exo 11

Soit (a_n) une suite décroissante de réels positifs ; On suppose que la série $\sum a_n$ converge. Montrer que $na_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exo 12 Formule de Stirling :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\mathrm{d}t$.

(1) Montrer que $\forall n \geqslant 2$, $nW_n = (n-1)W_{n-2}$.

(2) En déduire que pour tout entier naturel n, $(n+1)W_{n+1}W_n = W_1W_0$.

(3) Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que pour tout n, $W_n > 0$.

(4) Montrer que $W_{n+1} \sim W_n$; En déduire $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

(5) Calculer pour tout entier p, W_{2p} et W_{2p+1}.

(6) Montrer que la suite de terme général $a_n = \dfrac{1}{n!}n^{n+1/2}e^{-n}$ converge. Soit ℓ sa limite. Justifier $\ell > 0$.

(7) Déterminer ℓ en utilisant W_{2n}.

(8) En déduire la formule de Stirling : $n\,! \sim \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

Exo 13

Convergence de la série de terme général :

$$u_n = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{(-1)^n + \sqrt{n}}\right)$$

Exo 14

Étudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \mathrm{e}^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$$

Exo 15 Montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 8^n}{(2n)!}$$

est un réel négatif.

Exo 16

Déterminer les valeurs du réel x pour lesquels la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$ est convergente.

Exo 17

On considère la série $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$, appelée *série harmonique alternée*.

(1) Montrer que cette série n'est pas absolument convergente.

(2) Montrer que cette série est convergente.

(3) En remarquant que $\frac{1}{n+1} = \int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t$, calculer la somme de cette série.

(4) En déduire un encadrement de $\ln 2$, à 10^{-1} près, à l'aide de deux rationnels.

Exo 18

Montrer la convergence et calculer la somme des séries suivantes :

(1) $\sum_{n\geqslant 3} \frac{4n-3}{n(n^2-4)}$

(2) $\sum_{n\geqslant 0} \operatorname{Arctan} \frac{1}{n^2+n+1}$

Exo 19

Étudier la convergence et calculer la somme des séries proposées.
On donne : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

(1) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$.

(2) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(n-1)}{(n+1)(n-2)^2}$.

(3) $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(n^2-3)}{(n-2)!}$.

Exo 20

On s'intéresse à la suite définie par $a_0 > 0$ et $a_{n+1} = 1 - \mathrm{e}^{-a_n}$.

(1) Étudier la convergence de cette suite.

(2) Déterminer la nature de la série de terme général $(-1)^n a_n$.

(3) Déterminer la nature de la série de terme général a_n^2.

(4) Étudier la série de terme général $\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. En déduire la nature de la série de terme général a_n.

Exo 21

(1) Montrer que l'équation $x^n + x\sqrt{n} - 1 = 0$ a une unique racine positive, notée x_n.

(2) Déterminer la limite de $(x_n)_n$, puis étudier les séries $\sum x_n$ et $\sum (-1)^n x_n$.

Exo 22

On pose

$$u_n = \cos\left(\pi \sqrt[3]{n^3 + an^2 + bn}\right)$$

À quelle condition portant sur a et b la série de terme général u_n est-elle convergente ?

Exo 23

Soit $\sum u_n$ une série convergente à terme général positif.

(1) Que dire de la nature de $\sum u_{2n}$?

(2) Que dire de la nature de $\sum \sqrt{u_n u_{2n}}$?

Exo 24

Montrer la convergence des séries suivantes, et déterminer n pour que S_n soit une valeur approchée de la somme à 10^{-3} près.

(1) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n^2+1}$.

(2) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{3n^2+1}$.

Exercices de math-info à l'oral des concours

Exo 25 *Centrale II*

Soit $y \notin \left\{\frac{1}{2} + n,\ n \in \mathbb{N}\right\}$. On cherche q, l'unique entier tel que $|y - q| < \frac{1}{2}$, c'est-à-dire l'entier le plus proche de y.

(1) Écrire une fonction qui à y renvoie q.

(2) On note a_n l'entier le plus proche de $n\,!\,\mathrm{e}^{-1}$ et $b_n = n\,!\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

- Calculer les 16 premiers termes de ces suites.
- Formuler une conjecture, la démontrer.

(3) On note $d_n = n\,!\,\mathrm{e}^{-1} - b_n$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$.

- Calculer les 16 premiers termes de $(d_n)_n$ et $\left(\frac{J_n}{d_n}\right)_n$.
- Formuler une conjecture, la démontrer.

Exo 26 *Centrale II*

1er exercice Lorsque x est un réel dans $[0\,,1[$, il existe une suite $(a_n)_n$ telle que $x = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n 10^{-n}$ où, pour tout n, $a_n \in \{0\,,\ldots,9\}$.
Soit f la fonction de $[0\,,1[$ dans $[0\,,1[$ telle que $f(0) = 1$ et, pour tout $x \neq 0$:

$$f(x) = 0, a_2 a_1 a_3 a_4 \ldots$$

où $x = 0\,, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$ (on inverse a_1 et a_2).

(1) Représenter graphiquement f.

(2) f est-elle continue sur $[0\,,1[$?

(3) f est-elle continue par morceaux ?

(4) L'intégrale de f sur $[0\,,1[$ existe-t-elle ? Si oui, en donner une approximation.

2ème exercice On considère la fonction $\begin{array}{rccl} g: &]0,1] & \to &]0,1] \\ & x & \mapsto & x^x \end{array}$.

(1) Déterminer α tel que, si on pose $g(0)=\alpha$, g soit continue en 0.

(2) Représenter g.

(3) Donner le minimum de g sur $[0\,,1]$ et préciser l'allure de sa courbe au voisinage de 0.

(4) Donner une approximation de l'intégrale de g sur $[0\,,1]$.

(5) Écrire l'intégrale de g sur $[0\,,1]$ comme somme d'une série.

(6) Donner une expression de la somme. On calculera pour cela $I_{\alpha,\beta}=\displaystyle\int_0^1 x^\alpha \ln^\beta x\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une relation de récurrence.

Pour le premier exercice, c'est un peu long si on n'a pas tout de suite une idée.
Examinateur plutôt sympathique qui donne les indications si vraiment on cale.
On perd vite du temps avec l'informatique.

Exo 27 Python – *Arts et Métiers*

(1) Dans cette question, on veut résoudre l'équation :

$$x\ln(x)-2=0$$

par la méthode de Newton.

a. Représenter sur un même graphe les courbes représentatives de $x\longmapsto x\ln x-2$ et $x\longmapsto 0$, $x\in[0\,,10]$.

b. On pose $x_0=3$. Rappeler la relation de récurrence :

$$x_{p+1}=\psi(x_p)$$

fournie par la méthode de Newton.

c. Former la liste $[\mathtt{x}_0,\mathtt{x}_1,\ldots,\mathtt{x}_{20}]$, et constater qu'elle est stationnaire. À partir de quel indice ?

(2) Reprendre la question précédente avec l'équation :

$$x^3-4x+1=0$$

sur l'intervalle $[-2\,.5\,,2]$, en prenant $x_0=1\,.2$.

(3) Écrire une fonction `indice(psi, x0)` qui renvoie le premier indice p tel que $x_{p+1}=x_p$.

(4) On charge la fonction `fsolve` du module `scipy.optimize` par l'instruction :
`from scipy.optimize import fsolve`
Lire l'aide `help(fsolve)` et expliquer à quoi correspondent les deux premiers arguments de cette fonction.

(5) Utiliser `fsolve` pour résoudre à nouveau les deux équations précédentes.

Parallèle entre le chapitre sur les intégrales généralisées et le chapitre sur les séries numériques

1. Les similitudes

Intégrales généralisées	**Séries numériques**
$F\ :\ x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$	$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$
• $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge ssi $\exists \lim\limits_{+\infty} F$	• $\sum u_n$ converge ssi $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$
et en cas de cv, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f = \lim\limits_{+\infty} F$	et en cas de cv, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$
• caractère local	• caractère local
• $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ cv absolument ssi $\displaystyle\int_a^{+\infty} \|f\|$ cv ssi f est $\mathcal{L}^1$ sur $[a,+\infty[$	• $\sum u_n$ cv absolument ssi $\sum \|u_n\|$ cv
• Fonctions de référence : ⋆ Riemann en 0 et $+\infty$ ⋆ exp ⋆ ln	• Séries de référence : ⋆ Riemann ⋆ série définissant l'exponentielle ⋆ géométriques
• Combinaison linéaire	• Combinaison linéaire
• Pour $f \geqslant 0$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ cv ssi F est majorée	• Pour $(u_n) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^{\mathbb{N}}$, $\sum u_n$ cv ssi (S_n) est majorée
• Méthode par éclatement	• Méthode par éclatement
• On essaye d'estimer l'intégrande pour le comparer à une fonction de référence	• On essaye d'estimer le terme général de la série pour le comparer à une suite de référence
Comparaison intégrale	/ série

2. Les différences

Intégrales généralisées	**Séries numériques**
• $\varnothing$	• $\sum u_n$ cv $\implies u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
• Les th. de majoration, domination, équivalent portent sur l'intégrabilité (donc on travaille avec des $\| \|$)	• Les th. de majoration, domination, équivalent ne sont valables que pour les séries à termes positifs
• On pourrait travailler sur $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} f$ mais on ne le fait pas	• On travaille souvent sur les restes
• $\varnothing$	• TSSA
• $\varnothing$	• D'alembert

Preuve du théorème pdt de Cauchy (non exigible)

Preuve.

- On commence par traiter le cas où les suites sont à valeurs positives. Dans ce cas, convergence et convergence uniforme désignent la même notion. La démonstration se fait en revenant à la définition de la convergence, c'est-à-dire par l'étude de la suite des sommes partielles. On note :

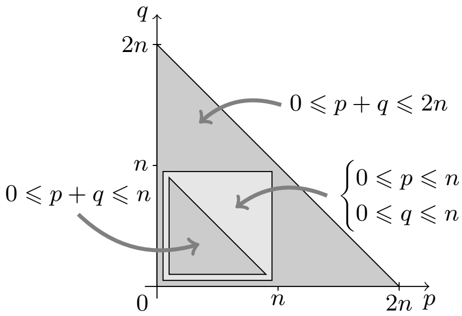
$$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k,\ U = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k,$$
$$V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k,\ V = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k \text{ et}$$
$$W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$$

  et on chercher à montrer que $W_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} UV$.

  Comme $w_k \geqslant 0$ pour tout k, la suite $(W_n)_n$ est croissante, de même que les suites $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$. On a :

$$W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{p+q=k} u_p v_q = \sum_{0\leqslant p+q\leqslant n} u_p v_q$$
$$U_n \times V_n = \left(\sum_{p=0}^{n} u_p\right) \times \left(\sum_{q=0}^{n} v_q\right) = \sum_{0\leqslant p,q\leqslant n} u_p v_q$$
$$W_{2n} = \sum_{0\leqslant p+q\leqslant 2n} u_p v_q$$

  Tous les termes considérés sont positifs. Les domaines de sommations satisfont les inclusions suivantes :



  donc :

$$W_n \leqslant U_n \times V_n \leqslant W_{2n}$$

  Par croissance de $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$, on a pour tout n :

$$W_n \leqslant U \times V$$

  donc la suite $(W_n)_n$ est croissante et majorée, donc converge vers une limite que l'on note W. Par passage à la limite dans l'encadrement précédent, en utilisant que $(W_{2n})_n$ est extraite de $(W_n)_n$ donc converge vers la même limite, on a $W \leqslant U \times V \leqslant W$.
  On a donc montré que la suite des sommes partielle $(W_n)_n$ est convergente, donc $\sum w_n$ converge, et sa somme W vaut $U \times V$.

- On se place maintenant dans le cas général de séries numériques à termes généraux quelconques, en conservant les mêmes notations.
  D'une part la série $\sum w_n$ converge absolument par majoration : Pour tout n :

$$|w_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |u_k|\,|v_{n-k}|$$

  qui est le terme général d'une série convergente (produit de Cauchy de $\sum |u_n|$ et $\sum |v_n|$) par application du premier point.
  D'autre part :

$$\begin{aligned} |U_nV_n - W_n| &= \left|\sum_{\substack{0\leqslant p,q\leqslant n\\ n<p+q}} u_p v_q\right| \quad \forall n \\ &\leqslant \sum_{\substack{0\leqslant p,q\leqslant n\\ n<p+q}} |u_p||v_q| \\ &= U'_nV'_n - W'_n \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ par le premier point} \end{aligned}$$

  où $U'_n = \sum_{k=0}^{n} |u_k|$, $V'_n = \sum_{k=0}^{n} |v_k|$ et $W'_n = \sum_{k=0}^{n} |w_k|$.
  Donc la somme de la série $\sum w_n$ est bien le produit $U \times V$.

$\square$